令和６年度入学試験問題（後期日程）

数　　　　学

中等教育教員養成課程
中等教育プログラム　数学専攻

注意事項

1. **試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見てはいけません。**
2. 解答紙は４枚（４の１，４の２，４の３，４の４）あります。
3. 試験開始後，各解答紙の上部の２箇所に受験番号を記入しなさい。また，計算紙にも受験番号を記入しなさい。
4. 解答はすべて解答紙の所定の解答欄に記入しなさい。**解答紙の裏面に記入した解答は採点の対象になりません。**
5. 定規，コンパスは使用できません。

〔1〕　次の問いに答えよ。

（問1）　9個の整数 1，2，3，4，5，6，7，8，9 から，一度に異なる 5 つの数を無作為に取り出すとき，5 つの数の中央値が 5 である確率を求めよ。

（問2）　次の連立方程式を解け。

$$\begin{cases} x^2+xy+zx=-5 \\ xy+y^2+yz=10 \\ zx+yz+z^2=20 \end{cases}$$

（問3）　a を正の定数とする。関数 $f(x)$ が実数全体で連続であり，常に

$$f(x+a)=f(x)$$

が成り立っている。このとき，

$$\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} f(x)\,dx=\int_0^a f(x)\,dx$$

が成り立つことを置換積分を利用して示せ。

〔2〕　a を正の実数とし，$\{a_n\}$ を初項 a，公差 3 の等差数列とする。また，

$$S_n=\frac{1}{a_1a_3}+\frac{1}{a_2a_4}+\frac{1}{a_3a_5}+\cdots+\frac{1}{a_{n-2}a_n}\quad (n=3,4,5,\cdots)$$

とする。次の問いに答えよ。

（問1）　数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

（問2）　$n \geqq 3$ のとき，S_n を a と n を用いて表せ。

（問3）　$a=3$ のとき，$S_n>\dfrac{1}{15}$ を満たす自然数 n の最小値を求めよ。

〔3〕　a，b を定数とし，$a\neq 0$，$b\neq 0$ とする。次の関数 $f(x)$ が $x=\dfrac{\pi}{2}$ で微分可能であるとする。

$$f(x)=\begin{cases} (x+a)(b-\cos x) & \left(0\leqq x<\dfrac{\pi}{2}\right) \\ \dfrac{\pi}{2}\log\left(x+1-\dfrac{\pi}{2}\right) & \left(x\geqq\dfrac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

次の問いに答えよ。ただし，対数は自然対数とする。

（問1）　a，b の値を求めよ。

（問2）　$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}+e-1} f(x)\,dx$ の値を求めよ。ただし，e は自然対数の底とする。

〔4〕 次の問いに答えよ。

（問1） a, b, c を正の整数とする。このとき，次の $(*)$ が成り立つ。

> a, b が互いに素であり，bc が a で割り切れるならば，c は a で割り切れる。 $(*)$

この事実について，以下の（ア）,（イ）に答えよ。

（ア） 次の記述はユークリッドの互除法を利用した $(*)$ の証明である。(1) の空欄を適切に埋め，(2) および (3) の空欄にあてはまる数式をそれぞれ答えよ。

> **証明** a, b が互いに素だから，$\boxed{\quad(1)\quad}$ は 1 である。このとき，ユークリッドの互除法から
>
> $$\boxed{\quad(2)\quad}$$
>
> を満たす整数 x, y が存在する。bc が a で割り切れるから，
>
> $$bc = a \cdot k$$
>
> を満たす整数 k が存在する。$\boxed{\quad(2)\quad}$ の両辺に c を掛けて，
>
> $$l = \boxed{\quad(3)\quad}$$
>
> とおけば，l は整数であり，
>
> $$c = a \cdot l$$
>
> と表せる。よって，c は a で割り切れる。（終）

（イ） a, b が互いに素であるとき，c が a, b の両方で割り切れるならば c は ab で割り切れることを，$(*)$ を利用して示せ。

（問2） x, y を自然数とする。1つ 90 円の商品 A を x 個，1つ 130 円の商品 B を y 個あわせて総額が 5000 円になるような x と y の組み合わせを全て求めよ。