

令和6年度入学試験問題（前期日程）

数 学

中等教育教員養成課程 中等教育プログラム 数学専攻

注意事項

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
2. 解答紙は4枚（4の1，4の2，4の3，4の4）あります。
3. 試験開始後、各解答紙の上部の2箇所を受験番号を記入しなさい。また、計算紙にも受験番号を記入しなさい。
4. 解答はすべて解答紙の所定の解答欄に記入しなさい。**解答紙の裏面に記入した解答は採点の対象になりません。**
5. 定規，コンパスは使用できません。

[1], [2] 1 ページ

[3], [4] 2 ページ

[1] 次の問いに答えよ。

(問1) 楕円 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ に内接する長方形で、各辺が座標軸に平行な長方形の面積の最大値を求めよ。

(問2) 次の連立方程式を満たす整数 x, y, z の組をすべて求めよ。

$$\begin{cases} 4^x 2^y 2^z = 128^3 \\ 2^z = (8^x)^y \end{cases}$$

(問3) z を複素数とし、 $w = i \frac{z+2}{z-1}$ とする。複素数平面において点 z が原点 O を中心とする半径 2 の円上を動くとき、点 w が描く図形を求めよ。ただし、 i は虚数単位とする。

[2] 1個のさいころを繰り返し投げけるゲームを行う。1の目が k 回出た時点でゲームは終わる。このとき、ゲームが終わった時点でさいころを投げた回数が n である確率を p_n とする。ただし、 k は 2 以上の整数で、 n は k 以上の整数とする。

(問1) p_k, p_{k+1} を求めよ。

(問2) p_n を求めよ。

(問3) $p_n < p_{n+1}$ を満たす n の範囲を求め、さらに p_n が最大となる n をすべて求めよ。

[3] 点 O を原点とする座標空間内に 3 点 $A(2, 0, 0)$, $B(-2, 0, 0)$, $C(1, 2, 3)$ をとる。 O , A , B と異なる点 $P(x, y, z)$ が $\overrightarrow{AP} \perp \overrightarrow{BP}$ となるように動くとき、次の問いに答えよ。

(問1) x, y, z の満たす条件を求めよ。

(問2) 直線 AP と yz 平面との交点を $Q(0, \beta, \gamma)$ とする。次の (ア), (イ), (ウ) に答えよ。

(ア) β, γ をそれぞれ x, y, z を用いて表せ。

(イ) x, y, z をそれぞれ β, γ を用いて表せ。

(ウ) 点 P がさらに $\overrightarrow{OP} \perp \overrightarrow{OC}$ となるように動くとき、 Q は yz 平面上でどのような図形を描くか。 Q の描く図形を求めよ。

[4] 区間 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ において、2 つの曲線 $y = \sin x$, $y = \cos 2x$ と 2 つの直線 $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$ とで囲まれた部分を D とする。次の問いに答えよ。

(問1) D の面積を求めよ。

(問2) $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ の範囲で $|\sin x| \geq |\cos 2x|$ を解け。

(問3) D を x 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。