

令和3年度入学試験問題（後期日程）

数 学

（中等教育教員養成課程 数学専攻）

注意事項

1. **試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。**
2. 解答紙は4枚（4の1，4の2，4の3，4の4）あります。
3. 試験開始後、各解答紙の上部の2箇所を受験番号を記入しなさい。また、計算紙にも受験番号を記入しなさい。
4. 解答はすべて解答紙の所定の解答欄に記入しなさい。**解答紙の裏面に記入した解答は採点の対象になりませんので注意してください。**
5. 定規，コンパスは使用できません。

[1], [2] 1 ページ

[3], [4] 2 ページ

[1] 次の問いに答えよ。

(問 1) 2 次方程式 $x^2 + ax + 2 - 3a = 0$ が 2 つの整数の解をもつような定数 a の値を求めよ。

(問 2) t が 1 より大きい実数の範囲を動くとき

$$(\log_2 t + \log_t 2)(\log_2 t + \log_t 4)$$

の最小値を求めよ。

(問 3) 方程式 $x^6 = 1$ の解を 1 つ選び、1 個のさいころを投げる。選んだ解を z 、さいころの出た目を a とするとき $z^a = 1$ となる確率を求めよ。

[2] $OA = OB = 2$, $OC = 4\sqrt{2}$, $\angle AOB = \frac{\pi}{3}$, $\angle BOC = \frac{\pi}{4}$, $\angle COA = \frac{\pi}{2}$

を満たす四面体 $OABC$ について、次の問いに答えよ。

(問 1) 内積 $\vec{OA} \cdot \vec{OB}$, $\vec{OB} \cdot \vec{OC}$, $\vec{OC} \cdot \vec{OA}$ の値を求めよ。

(問 2) 点 B から 3 点 O , A , C を通る平面 α に下ろした垂線と α の交点を H とおく。 \vec{OH} を \vec{OA} , \vec{OC} を用いて表せ。

(問 3) BH の長さを求めよ。

(問 4) 2 点 O , H を通る直線と直線 AC の交点を I とおく。四面体 $HABI$ の体積を求めよ。

[3] a, b を実数とし, k を正の実数とする。3 次方程式 $3x^3 + ax^2 + bx - 2k^3 = 0$ は虚数解 α をもち, α は $|\alpha| = k, \alpha^2 + k\bar{\alpha} = 0$ を満たしている。ただし, $\bar{\alpha}$ は α の共役複素数を表す。次の問いに答えよ。

(問 1) $\bar{\alpha}$ が $3x^3 + ax^2 + bx - 2k^3 = 0$ の解であることを示せ。

(問 2) a, b を k を用いて表せ。

(問 3) $k = 2$ のとき 3 次方程式 $3x^3 + ax^2 + bx - 2k^3 = 0$ の虚数解で虚部が負であるものを β とおく。複素数平面上の 3 点 $O(0), A(\beta - \gamma), B(\beta + \gamma)$ を頂点とする三角形が O を直角の頂点とする直角二等辺三角形になるような複素数 γ をすべて求めよ。

[4] 関数 $f(x) = \sin 2x + 2 \sin x$ ($0 \leq x \leq 2\pi$) の最大値を M とする。次の問いに答えよ。

(問 1) M の値を求めよ。

(問 2) 曲線 $y = f(x)$ と y 軸および直線 $y = M$ によって囲まれた部分の面積を求めよ。

(問 3) a を実数とするととき, $\int_0^\pi \{f(x) - a\}^2 dx$ の最小値とそのときの a の値を求めよ。